

30-0531/001

INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
DIREKTOREN: PROF. DR.-ING. K. KORDINA – PROF. DR.-ING. G. REHM

B e r i c h t
über die
Untersuchung von Druckplatten gevouteter
Hohlkastenträger

erstattet von

AV u. Prof. Dr.-Ing. J. Eibl

und

Dr.-Ing. G. Iványi

1969

DIZ 103747
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
der Technischen Universität Braunschweig
Beethovenstraße 52
3300 Braunschweig

Postsendungen:
33 Braunschweig, Beethovenstraße 52
Erfüllungsort und Gerichtsstand Braunschweig

Fernsprecher: (0531) 391 2281

Fernschreiber: 9 52 693 ibstb d

Zur Vermeidung von Verzögerungen wird dringend gebeten, Zuschriften nur an das Institut zu richten, nicht aber an einzelne Mitarbeiter.

Zusammenfassung

Im Stützenbereich von gevouteten Hohlkastenträgern müssen die Druckkräfte am unteren Querschnittsrand umgelenkt werden. Diese Umlenkkräfte erzeugen Querbiegemomente in der unteren Platte, die üblicherweise unter Außerachtlassung der Plattenlängskrümmung ermittelt werden.

Im Rahmen des vorliegenden Forschungsvorhabens wurde versucht, die tatsächlichen Querbiegemomente mit Hilfe eines "Ersatzzylin-
ders" zu berechnen. Die hierfür notwendigen Annahmen wurden durch einen Modellversuch bestätigt.

Die eingeführten Vereinfachungen erlauben eine schnelle Bestimmung der Druckverteilung in der unteren Platte, der mitwirkenden Plattenbreite und der Querbiegemomente an Hand von Parametern, die nur von der Schalengeometrie abhängen.

Dabei zeigt sich, daß bei hohen Umlenkkräften, d.h. großen Krümmungen, die so ermittelten Querbiegemomente erheblich unter den Werten liegen, wie sie aus den bisher üblichen Berechnungen resultieren. Es ergibt sich jedoch eine Verringerung der mitwirkenden Druckplattenbreite, die zu Spannungserhöhungen in Steg und Fahrbahnplatte führt.

Die Finanzierung des vorliegenden Forschungsvorhabens erfolgte aus Mitteln des Landes Niedersachsen.

1. Aufgabenstellung

Im Brückenbau werden oftmals Durchlaufträger mit Hohlkastenquerschnitt ausgeführt, deren Bauhöhe veränderlich ist (vgl. Bild 1). Die Höhe des Querschnitts nimmt dabei von der Stütze gegen die Feldmitte hin nach einer quadratischen bzw. kubischen Parabel ab. Der Krümmung der unteren Platte folgend, müssen die Druckkräfte im Bereich der Innenstütze umgelenkt werden, was zu einer Querbiegung der unteren Platte führt.

Üblicherweise werden diese Biegemomente an einem 1 m breiten Streifen einer unendlichen langen, ebenen Platte errechnet, die durch eine gleichmäßig verteilte Umlenkkraft belastet ist. Dabei können sich in Abhängigkeit von der Krümmung sehr hohe Feld- und Stützmomente ergeben. Es ist jedoch anzunehmen, daß die Krümmung der unteren Platte die Abtragung der Umlenkkräfte entscheidend begünstigt.

Bislang wurden gekrümmte Druckplatten von zusammengesetzten Querschnitten genauer nur im Hinblick auf eine reduzierte mitwirkende Plattenbreite studiert. Insbesondere wurden im Stahlbau Bereiche mit sehr scharfer Krümmung, wie sie z.B. in Rahmenecken auftreten, von Bleich [2], Steinhardt [9] u.a. untersucht. Einen Überblick über diese Arbeiten gibt Drescher in [3]. Bei allen diesen Untersuchungen wurden die Querbiegemomente mit Rücksicht auf die Anwendung im Stahlbau außer acht gelassen.

Ziel des vorliegenden Forschungsvorhabens war es, insbesondere die Querbiegemomente von schwach gekrümmten Druckplatten, wie eingangs erläutert, zu ermitteln. In diesem Zusammenhang war natürlich auch die Frage der mitwirkenden Plattenbreite zu diskutieren.

2. Rechnerische Untersuchung

2.1 Ermittlung der Umlenkkräfte bei veränderlicher Längsdruckkraft

Nach Bild 2 erhält man mit dem Einheitsvektor

$$(2.1) \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix}$$

und dem Vektor der Druckkraft

$$(2.2) \quad \vec{D} = |D| \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$(2.3) \quad \frac{\partial D}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \vec{n} = p \cdot g(\varphi) d\varphi$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \cdot \vec{n} &= -\frac{\partial D}{\partial \varphi} (\cos\varphi \sin\varphi - \cos\varphi \sin\varphi) \\ &+ D (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = p g(\varphi). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die bekannte Beziehung für die Umlenkkraft:

$$(2.4) \quad p = \frac{D}{g(\varphi)}.$$

2.2 Ermittlung der Druckplattenbeanspruchung an einem idealisierten Ersatzmodell

Zur Ermittlung der Druckplattenbeanspruchung müßte die untere Platte als kurze, elastisch gestützte Zylinderschale mit veränderlichem Radius $g(\varphi)$ und variabler Druckkraft $D(\varphi)$ untersucht werden. Wir wollen statt dessen ein vereinfachtes mechanisches Modell nach Bild 3 untersuchen und später die hier vorgenommene Idealisierung durch Modellversuche begründen (vgl. dazu die Untersuchungen von Drescher [3]).

2.2.1 Beschreibung des Lösungsweges - Definition von Einflußkoeffizienten

Für die angreifenden Druckkräfte, die entsprechend der mitwirkenden Druckplattenbreite nach Bild 3b verteilt sind,

machen wir folgenden Ansatz:

$$(2.5) \quad D(y) = D - \beta D \sin \frac{\pi y}{\ell}$$

wobei der 2. Term in (2.5) näherungsweise als 1. Glied einer Fourier-Entwicklung der tatsächlichen Verteilungsfunktion $D(y)$ betrachtet werden kann. Eine ähnliche Annahme macht Reissner in [7].

Diese Druckkräfte nach (2.5) werden in der Kreiszylinderschale Umlenkkräfte (Bild 3a):

$$(2.6) \quad \Sigma p(y) = p - \beta p \sin \frac{\pi y}{\ell} = \frac{1}{a} (D - \beta D \sin \frac{\pi y}{\ell})$$

erzeugen, die ihrerseits Querbiegemomente und Längskräfte hervorrufen.

In Ringrichtung muß deshalb folgende Beziehung für die daraus resultierenden Normalkräfte gelten:

$$(2.7) \quad -a p k_1 \sin \frac{\pi y}{\ell} + \beta a p k_2 \sin \frac{\pi y}{\ell} = -\beta D \sin \frac{\pi y}{\ell}$$

wenn eine äußere "Druckkraft" mit der Resultierenden

$$(2.8) \quad R_D = \int_0^{\ell} (D - \beta D \sin \frac{\pi y}{\ell}) dy$$

durch diesen Abschnitt der Schale geleitet werden soll. Die Terme

$$(2.9) \quad a p k_1 \sin \frac{\pi y}{\ell} \quad \text{bzw.} \quad \beta a p k_2 \sin \frac{\pi y}{\ell}$$

werden dabei näherungsweise jeweils als 1. Glied einer Normalkraftverteilung betrachtet, wie sie sich aus einer gleichmäßig bzw. sinusförmig verteilten Umlenkkraft ergeben.

Unter Beachtung von (2.6) erhält man aus (2.7):

$$(2.10) \quad -Dk_1 \sin \frac{\pi y}{\ell} + \beta Dk_2 \sin \frac{\pi y}{\ell} = -\beta D \sin \frac{\pi y}{\ell}$$

oder

$$(2.11) \quad \beta = \frac{k_1}{1+k_2}.$$

Die mittragende Plattenbreite ist dabei wie folgt definiert:

$$(2.12) \quad R_D = 2b_i \cdot D$$

oder wegen (2.8):

$$(2.13) \quad \begin{aligned} b_i &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (1 - \beta \sin \frac{\pi y}{\ell}) dy \\ b_i &= \frac{\ell}{2} (1 - \frac{2\beta}{\pi}) \\ b_i &= \frac{\ell}{2} \cdot \gamma. \end{aligned}$$

wenn

$$(2.14) \quad \gamma = 1 - \frac{2\beta}{\pi}.$$

Die Quermomente kann man in der Form:

$$(2.15) \quad M(y) = pl^2 k_3(y) - \beta pl^2 k_4(y) = pl^2 \alpha(y)$$

angeben, wenn

$$pl^2 k_3(y) \quad \text{bzw.} \quad \beta pl^2 k_4(y)$$

jeweils die aus einer gleichmäßig verteilten Umlenkkraft p bzw. einer sinusförmig verteilten Umlenkkraft βp resultierenden Momente $M(y)$ ausdrücken.

In einem vorgegebenen Fall kann zunächst k_1 und k_2 - wie wir zeigen werden, hängt $k_1 - k_4$ nur von der Geometrie des Trägers ab - und damit nach (2.11) β berechnet werden. Aus (2.13) bzw. (2.14) erhält man die mitwirkende Druckplattenbreite und bei gegebenem äußeren Moment die Druckkraft D . Mit D ist aber bei bekanntem k_3 und k_4 das Querbiegemoment nach (2.15) leicht zu bestimmen.

2.2.2 Ermittlung der Einflußkoeffizienten

Die folgende Aufgabe besteht also darin, $k_1 - k_4$ in Abhängigkeit von der Schallengeometrie zu bestimmen.

Betrachten wir zunächst einen an beiden Enden starr eingespannten, geschlossenen Kreiszyylinder der Länge l , der mit gleichmäßig verteilten Umlenkkraften p beaufschlagt ist.

Dafür gilt folgende Differentialgleichung: (vgl. z.B. [1])

$$(2.16) \quad \frac{d^4 w}{d(\lambda \eta)^4} + 4w = \frac{L^4}{K} p$$

mit der partikulären Lösung:

$$(2.17) \quad w_0 = \frac{1}{4K} L^4 p$$

und der homogenen Lösung:

$$(2.18) \quad w = C_1^R e^{-\lambda \eta} \cos \lambda \eta + C_2^R e^{-\lambda \eta} \sin \lambda \eta + C_3^R e^{\lambda \eta} \cos \lambda \eta + C_4^R e^{\lambda \eta} \sin \lambda \eta$$

(Der Index R kennzeichnet die gleichmäßige Verteilung)

Hierbei bedeuten:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} w &= \text{radiale Verschiebung} \\ \lambda &= \frac{l}{L} \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{y}{l}$$

$$(2.19) \quad L = \frac{1}{1,31} \sqrt{ad}$$

$$K = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Die entsprechenden Schnittkräfte lauten:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} N_y &= -\frac{Ed}{a} (w_0 + w) \\ M_y &= -K \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{w''}{L^2} \right) \end{aligned}$$

wenn

$$(\quad)' = \frac{\partial(\quad)}{\partial(\lambda\eta)}.$$

Mit den Randbedingungen:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} w &= -w_0 \\ w' &= 0 \end{aligned} \rightarrow [\lambda\eta]_{\eta=0} = 0$$

und

$$\begin{aligned} w &= -w_0 \\ w' &= 0 \end{aligned} \rightarrow [\lambda\eta]_{\eta=1} = \lambda = \frac{l}{L}$$

erhält man folgende Bestimmungsgleichung für die C_i^R :

$$(2.22) \quad [A^R] \begin{bmatrix} C_1^R \\ C_2^R \\ C_3^R \\ C_4^R \end{bmatrix} = |w_0| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wobei

$$(2.23) \quad [A^R] = \begin{bmatrix} +1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & +1 & +1 & +1 \\ e^{-\lambda} \cos \lambda & e^{-\lambda} \sin \lambda & e^{\lambda} \cos \lambda & e^{\lambda} \sin \lambda \\ -e^{-\lambda} (\cos \lambda + \sin \lambda) & e^{-\lambda} (\cos \lambda - \sin \lambda) & e^{\lambda} (\cos \lambda - \sin \lambda) & e^{\lambda} (\cos \lambda + \sin \lambda) \end{bmatrix}$$

Die C_i^R -Werte bestimmen sich aus Gl. (2.22) zu:

$$\begin{aligned} \frac{BC_1^R}{w_0} &= -e^{2\lambda} + 1 + 2\sin^2\lambda - \sin 2\lambda + (e^\lambda + e^{-\lambda})\sin\lambda + (e^\lambda - e^{-\lambda})\cos\lambda \\ (2.24) \quad \frac{BC_2^R}{w_0} &= -e^{2\lambda} - \sin 2\lambda + \cos 2\lambda + (3e^\lambda - e^{-\lambda})\sin\lambda + (e^\lambda - e^{-\lambda})\cos\lambda \\ \frac{BC_3^R}{w_0} &= -e^{-2\lambda} + 1 + 2\sin^2\lambda + \sin 2\lambda - (e^\lambda + e^{-\lambda})\sin\lambda - (e^\lambda - e^{-\lambda})\cos\lambda \\ \frac{BC_4^R}{w_0} &= e^{-2\lambda} - 2\sin 2\lambda + \cos 2\lambda - (e^\lambda - 3e^{-\lambda})\sin\lambda + (e^\lambda - e^{-\lambda})\cos\lambda \end{aligned}$$

mit der Abkürzung:

$$B = e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} - 2 - 4\sin^2\lambda.$$

Die entsprechenden Schnittkräfte nach (2.20) lauten damit:

$$\begin{aligned} (2.25) \quad N_y &= pa k_1(y) \\ M_y &= p\ell^2 k_2(y) \end{aligned}$$

wenn

$$\begin{aligned} k_1(y) &= 0,975 \left[1 + (C_1^R \cos \lambda \eta + C_2^R \sin \lambda \eta) e^{-\lambda \eta} \right. \\ &\quad \left. + (C_3^R \cos \lambda \eta + C_4^R \sin \lambda \eta) e^{\lambda \eta} \right] \\ k_2(y) &= \frac{0,5}{\lambda^2} \left[(C_1^R \sin \lambda \eta - C_2^R \cos \lambda \eta) e^{-\lambda \eta} \right. \\ &\quad \left. + (C_4^R \cos \lambda \eta - C_3^R \sin \lambda \eta) e^{\lambda \eta} \right]. \end{aligned}$$

Wie eine Untersuchung von $k_1(y)$ für verschiedene Werte λ zeigt, kann bei den üblichen Querschnittsabmessungen, wie in (2.7) angenommen, näherungsweise gesetzt werden:

$$(2.26) \quad k_1(y) \approx [k_1]_{y=\ell/2} \cdot \sin \frac{\pi y}{\ell}$$

Wir erhalten schließlich für k_1 nach (2.7):

$$(2.27) \quad k_1 = 0.975 \left[1 + (C_1^R \cos(\lambda/2) + C_2^R \sin(\lambda/2)) e^{-\lambda/2} + (C_3^R \cos(\lambda/2) + C_4^R \sin(\lambda/2)) e^{\lambda/2} \right].$$

In gleicher Weise gilt für eine sinusförmig verteilte Gleichlast

$$\beta p \sin \frac{\pi y}{\ell}$$

eine DGL. von der Form:

$$(2.28) \quad \frac{d^4 w}{d(\lambda \eta)^4} + 4w = \frac{L^4}{K} \beta p \sin \frac{\pi y}{\ell}$$

mit der partikulären Lösung:

$$(2.29) \quad w_0 = \frac{L^4 \beta p}{K(4 + \frac{\pi^4}{\lambda^4})} \sin \frac{\pi y}{\ell}$$

und einer homogenen Lösung nach (2.18), wobei zur Kennzeichnung der sinusförmig verteilten Last

$$C_i^R \text{ durch } C_i^S$$

ersetzt wurde.

Mit den Randbedingungen:

$$(2.30) \quad \begin{aligned} [w + w_0]_{y=0} &= 0 \quad \longrightarrow \quad [w]_{\eta=0} = 0 \\ [w' + w_0']_{y=0} &= 0 \quad \longrightarrow \quad [w']_{\eta=0} = -L[w_0']_{y=0} \\ [w + w_0]_{y=\ell} &= 0 \quad \longrightarrow \quad [w]_{\eta=1} = 0 \\ [w' + w_0']_{y=\ell} &= 0 \quad \longrightarrow \quad [w']_{\eta=1} = -L[w_0']_{y=\ell} \end{aligned}$$

erhält man folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung von C_i^S :

$$(2.31) \quad [A^S] \begin{bmatrix} C_1^S \\ C_2^S \\ C_3^S \\ C_4^S \end{bmatrix} = |w_0'|_{\eta=0} \cdot L \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wobei $A^S = A^R$ nach (2.23).

Mit (2.31) lauten die C_i^S :

$$\frac{BC_1^S}{w_0' L} = -2 \sin^2 \lambda + (e^\lambda - e^{-\lambda}) \sin \lambda$$

$$(2.32) \quad \frac{BC_2^S}{w_0' L} = 2e^\lambda \sin \lambda + 1 - e^{2\lambda} + \sin 2\lambda - (e^\lambda - e^{-\lambda}) \cos \lambda$$

$$\frac{BC_3^S}{w_0' L} = - \frac{BC_1^S}{w_0' L}$$

$$\frac{BC_4^S}{w_0' L} = -e^{-2\lambda} + 1 - \sin 2\lambda - 2e^{-\lambda} \sin \lambda + (e^\lambda - e^{-\lambda}) \cos \lambda,$$

wenn

$$B = e^{-2\lambda} + e^{2\lambda} - 2 - 4 \sin^2 \lambda.$$

Für die zugehörigen Schnittkräfte gilt:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} N_y &= p a k_2(y) \\ M_y &= p l^2 k_4(y) \end{aligned}$$

wobei

$$(2.34) \quad \begin{aligned} k_2(y) &= \frac{3,90}{4 + \frac{\pi^4}{\lambda^4}} \cdot \left\{ \sin \frac{\pi y}{l} + \frac{\pi}{\lambda} \left[(C_1^S \cos \lambda \eta + C_2^S \sin \lambda \eta) e^{-\lambda \eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (C_3^S \cos \lambda \eta + C_4^S \sin \lambda \eta) e^{\lambda \eta} \right] \right\} \\ k_4(y) &= \frac{\pi^2}{4\lambda^4 + \pi^4} \left\{ \sin \frac{\pi y}{l} - \frac{2\lambda}{\pi} \left[(C_1^S \sin \lambda \eta - C_2^S \cos \lambda \eta) e^{-\lambda \eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (C_4^S \cos \lambda \eta - C_3^S \sin \lambda \eta) e^{\lambda \eta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Mit einem zu (2.26) analogen Ansatz erhält man für k_2 in (2.7) schließlich:

$$(2.35) \quad k_2 = [k_2(y)]_{y=l/2} = \frac{3,90}{4 + \frac{\pi^4}{\lambda^4}} \left\{ 1 + \frac{\pi}{\lambda} \left[(C_1^s \cos \frac{\lambda}{2} + C_2^s \sin \frac{\lambda}{2}) e^{-\lambda/2} + (C_3^s \cos \frac{\lambda}{2} + C_4^s \sin \frac{\lambda}{2}) e^{\lambda/2} \right] \right\}.$$

Damit sind alle Werte $k_1 - k_4$ bekannt. Da von den Beanspruchungen gewöhnlich nur die Werte in Feldmitte bzw. am Rande interessieren, genügt es, nach (2.15) nur die Momente

$$(2.36) \quad M_R = pl^2 [k_3]_{y=0} - \beta pl^2 [k_4]_{y=0} = \frac{pl^2}{12} \alpha_R$$

$$M_M = pl^2 [k_3]_{y=l/2} - \beta pl^2 [k_4]_{y=l/2} = \frac{pl^2}{24} \alpha_M$$

anzugeben, wobei

$$(2.37) \quad \alpha_R = 12 \left[(k_3)_{y=0} - \beta (k_4)_{y=0} \right]$$

$$\alpha_M = 24 \left[(k_3)_{y=l/2} - \beta (k_4)_{y=l/2} \right].$$

Alle Hilfswerte $k_1, k_2, \alpha_R, \alpha_M, \beta, \gamma$ sind damit nur mehr Funktionen von

$$\lambda = \frac{1,31l}{\sqrt{ad}}$$

Den Verlauf dieser Werte über $\frac{1}{\lambda}$ zeigen die Bilder 4 und 5.

3. Plexiglas-Modellversuch

Zur Überprüfung der in 2. auf theoretischem Wege gewonnenen Ergebnisse wurde ein Versuch an einem Plexiglasmodell im Maßstab $\sim 1:50$ durchgeführt. Die Krümmungsverhältnisse der Druckplatte wurden dabei so gewählt, daß sich eine deutliche Schalenwirkung einstellen konnte. Der in der Berechnung vorausgesetzten starren

Einspannung der Druckplatte wurde durch entsprechend dicke Stege Rechnung getragen.

3.1 Festigkeitseigenschaften des verwendeten Plexiglasses

Als Modellwerkstoff wurde mit Rücksicht auf eine einfache Verarbeitbarkeit Plexiglas gewählt. Die Festigkeitseigenschaften des verwendeten Plexiglasses wurden in Vorversuchen ermittelt.

Die Bestimmung des E-Moduls bzw. der Querdehnungszahl erfolgte an verschieden geformten Meßkörpern mit elektrischen Dehn- bzw. Durchbiegungsmessungen. Diese Untersuchungen wurden für verschiedene Plattenstärken durchgeführt, da beim Modell unterschiedlich dicke Plexiglasplatten verwendet werden mußten. Diese Meßergebnisse sind in Bild 6 aufgetragen.

3.2 Beschreibung des Modells; Versuchsaufbau

Das untersuchte Modell eines durchlaufenden gevouteten Hohlkastenträgers stellt Bild 7 dar. Der Meßbereich erstreckte sich auf den auskragenden, belasteten Teil des Modells. Eine Verlängerung des interessierenden Trägerabschnittes über die Stütze hinaus war aus versuchstechnischen Gründen notwendig: hier konnte die notwendige Abspannung des Versuchsstückes am einfachsten erfolgen.

Der Versuchskörper wurde in 3 Querschnitten - in den beiden Endquerschnitten und über der Stütze - mit steifen Querschotten versehen. Um eine gute Verbundwirkung zu erzielen, wurden die einzelnen Elemente des Versuchskörpers verklebt und zusätzlich verschraubt.

Die Belastung wurde am Ende des Kragarmes durch eine mit Bleischrot gefüllte Büchse als Einzellast aufgebracht. Dabei wurde das eigentliche Plexiglasmodell durch Weiterführung der Stege verlängert, um ein möglichst großes Moment zu erzielen. Die aus dieser Belastung resultierenden Druckspannungen in der Druckplatte sind in Bild 8 wiedergegeben. Hieraus ist

ersichtlich, daß die maximalen Druckspannungen etwa im Bereich des Querschnitts IV auftreten; von hier ab fallen die Spannungen bis zum Stützenquerschnitt stetig ab.

3.3 Meßeinrichtung

Die Dehnungen wurden mit elektrischen Meßstreifen bzw. Rosetten bestimmt. Die Anordnung der Meßstellen ist aus Bild 9 ersichtlich. Außer den Meßstellen an der Druckplatte wurden solche in zwei Schnitten über den ganzen Querschnitt zur Gleichgewichtskontrolle angeordnet.

Wegen der großen Anzahl der Meßstellen mußten die Messungen bei jeder Laststufe in zwei Phasen durchgeführt werden. Diese Maßnahme war notwendig, um Kriechdeformationen des Modellwerkstoffes Plexiglas möglichst auszuschließen. Das Ablesen erfolgte jeweils 3 Minuten nach der Lasteintragung. Ein Meßvorgang dauerte etwa 6 Minuten. Danach wurde das Modell entlastet und nach 30 Minuten die Nullmessung wiederholt. Zur Kontrolle wurden die wichtigsten Meßstellen in beiden Phasen abgelesen.

Insgesamt wurde fünfmal die Last $P = 20 \text{ kp}$ am Kragarmende aufgebracht, um ein statistisches Mittel der Meßwerte bilden zu können. Diese Mittelwerte sind aus Tafel I ersichtlich.

3.4 Auswertung der Meßergebnisse

Für die Ermittlung der Spannungen aus gemessenen Dehnungen wurde auf Grund der Vorversuche (vgl. Bild 6) ein E-Modul von:

$$E = 40\,000 \text{ kp/cm}^2$$

und eine Querdehnungszahl von:

$$\nu = 0,38$$

angesetzt. Damit lauten die Beziehungen zwischen Dehnungen und Spannungen:

$$\tilde{\sigma}_l = 46\,800 (\epsilon_l + \nu \epsilon_q)$$

$$\tilde{\sigma}_q = 46\,800 (\epsilon_q + \nu \epsilon_l)$$

wobei die Indizes l und q die Längs- bzw. Querrichtung bezeichnen. Mit Hilfe dieser Ausdrücke wurden aus den Dehnungen in Tafel I Längs- und Querspannungen, wie in Tafel II angegeben, errechnet. Die Schnittkräfte M und N der Druckplatte wurden dann für beide Richtungen aus diesen Spannungen ermittelt (vgl. die Bilder 10 - 13).

Die in Bild 14 dargestellte Spannungsverteilung des Meßquerschnittes IV ergibt eine hinreichende Übereinstimmung zwischen innerem und äußerem Biegemoment.

3.5 Vergleich der Meßergebnisse mit den Rechenwerten

Für die vorliegenden Modellabmessungen ergibt sich

$$\lambda = \frac{12,128}{\sqrt{140,03}} = 2,38$$

Damit kann aus Bild 4 der zur Ermittlung der mittragenden Breite notwendige Beiwert

$$\gamma = 0,855$$

entnommen werden, so daß

$$b_i = \gamma \cdot l/2 = 0,855 \cdot 6,0 = 5,13 \text{ cm}$$

Bei bekannter mittragender Breite können die Trägheitsmomente, Druckspannungen und Umlenkkräfte in den einzelnen Meßquerschnitten I - V ermittelt werden. Die Abminderungsfaktoren α_R und α_M sind für $\lambda = 2,41$ aus Bild 5 zu entnehmen.

$$\alpha_R = 0,666$$

$$\alpha_M = 0,620$$

Mit diesen Parametern ergeben sich die rechnerischen Biegemomente (vgl. Gl. (2.36)) zu:

$$M_R = \frac{pl^2}{12} \alpha_R$$

$$M_M = \frac{pl^2}{24} \alpha_M$$

Die einzelnen Schritte des hier erläuterten Rechenschemas sind in Tafel III wiedergegeben. Diese Rechenwerte sind in Bild 8 - 14 ebenfalls eingetragen.

4. Diskussion der Ergebnisse

Wie in Bild 3 gezeigt, wurde bei der rechnerischen Untersuchung die vorliegende Zylinderschale mit variablem Krümmungsradius jeweils durch einen geschlossenen Kreiszylinder ersetzt. Dabei wurden 2 x 2 Randbedingungen an den Übergangsstellen Steg-Platte erfüllt. Randbedingungen an den Schmalseiten waren bei dem hier gewählten Idealisierung nicht zu berücksichtigen.

Wie die Versuchsergebnisse zeigen, werden diese Annahmen für den vorliegenden Fall von $\lambda = 2,38$ gut bestätigt. Insbesondere zeigen die im Versuch gemessenen Längsmomente, daß selbst bei einer relativ starken Normalkraftänderung wie in Bild 8 noch immer keine nennenswerte Lastabtragung in Plattenlängsrichtung erfolgt. Bei den in der Baupraxis auftretenden Längsbeanspruchungen, wie sie sich aus einer zur Momentenverteilung möglichst affinen Querschnittsänderung ergeben, wird deshalb die Annahme eines "Ersatzzylinders" immer vertretbar sein. Abweichend hiervon werden sicherlich im Anschlußbereich Druckplatte-Querträger Längsmomente auftreten. Hier wird jedoch die übliche Untersuchung der Druckplatte als dreiseitig eingespannter, unendlich langer Plattenstreifen mit gleichmäßig verteilter Belastung auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse liefern. Eine bei genauer Untersuchung mögliche, sicher jedoch nur geringe Momentenabminderung ist wegen der kleinen Druckplattenbreite wirtschaftlich von untergeordneter Bedeutung.

Eine weitere Näherung stellt die Annahme (2.26) für gleichmäßig verteilte Umlenkkräfte bzw. die analoge Annahme für sinusförmig verteilte Umlenkkräfte dar. Diese Vereinfachung bedarf jedoch keiner weiteren Erläuterung, da sie für jeden λ -Wert zahlenmäßig überprüfbar ist und im vorliegenden Falle auch durch den Versuch bestätigt wird.

Den Praktiker dürfte interessieren, daß bei starker Krümmung und großen Umlenkkräften die Biegemomente, wie sie sich nach der bisher üblichen Berechnung ergeben, beträchtlich abgemindert werden dürfen (vgl. Bild 4 u. 5). In Bereichen mit kleiner Krümmung ist

zwar nur eine geringe Abminderung möglich, hier sind jedoch auch keine nennenswerten Umlenkkräfte wirksam.

Dabei ist zu beachten, daß diese Verminderung aus einer nur beschränkt mitwirkenden Druckplattenbreite resultiert, was u.a. im Bereich des übrigen Querschnitts zu höheren Beanspruchungen führt. Bei Druckbewehrungen im Bereich der unteren Platte, wie sie gelegentlich notwendig werden (vgl. u.a. [4]), ist dies zu berücksichtigen.

Man kann die relativ starke Verminderung der mitwirkenden Breite bei einer gekrümmten Platte leicht erklären, wenn man bedenkt, daß eine solche Platte unter Längsdruck senkrecht zu ihrer Mittelfläche ausweicht und sich so der Beanspruchung teilweise entzieht. Sie ist bezüglich einer Längsverformung "weicher" als eine ebene Platte.

Eine Berechnung der mittragenden Plattenbreite nach den Angaben von Girkmann [6], Finsterwalder [5] und Thürlimann/Bereuter/Johnston [10] für Tonnenschalen ist nicht zu empfehlen, da die dort angegebenen Werte die gegenseitige Beeinflussung der von den beiden Stegen ausgehenden Randstörungen außer acht lassen.

5. Praktische Handhabung - Beispiele

Für den hier studierten "Grundfall" einer Druckplatte mit konstanter Dicke und starrer Einspannung zu den beiden Stegen kann die Ermittlung der Querbiegemomente, wie unter Pkt. 3.5 für das Plexiglasmodell gezeigt, erfolgen.

Will man bei hohen und dünnen Stegen eine nur teilweise Einspannung der unteren Druckplatte berücksichtigen, so kann dies näherungsweise nach Márkus [7] wie folgt geschehen:

Man entnimmt in Abhängigkeit von λ nach [7] die Steifigkeitszahl für einen kurzen, beidseitig eingespannten Zylinder:

$$S_z = \frac{Ed^3}{6(1-\nu^2)l} \lambda \frac{\sin \lambda \cos \lambda - sh \lambda ch \lambda}{\sin^2 \lambda - sh^2 \lambda} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)l} f_0$$

aus Bild 15 und errechnet sich eine entsprechende Steifigkeitszahl für den Steg:

$$S_s = \frac{4EJ_s}{h} \quad (\text{vgl. dazu Bild 17})$$

Ein am Knoten Zylinder-Steg angreifendes äußeres Moment M_K ist dann auf Zylinder und Steg wie folgt zu verteilen:

$$M_z = M_K \frac{f_0}{\frac{48EI(1-\nu^2)J_s}{hd^3} + f_0} = M_K \cdot f$$

bzw.

$$M_s = M_K (1-f)$$

Die Fortleitungszahl im Zylinder (vgl. [7]):

$$\chi = \frac{\sinh \lambda \cosh \lambda - \cosh \lambda \sinh \lambda}{\sinh \lambda \cosh \lambda - \cosh \lambda \sinh \lambda}$$

ist aus Bild 16 abzulesen. Mit den Werten f , κ kann in bekannter Weise ein Momentenausgleich, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird, durchgeführt werden.

Sollen "Plattenvouten" am Übergang Platte-Steg berücksichtigt werden, so können ähnliche Werte f und κ für den Fall des Zylinders mit abschnittsweise konstantem bzw. linear veränderlichem Trägheitsmoment nach [7] errechnet werden.

5.1 Beispiel

Gegeben sei ein Querschnitt nach Bild 17 mit:

$$h = 6,0 \text{ m} \quad J_s = 5,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$l = 6,0 \text{ m} \quad d = 0,40 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{1,31 \cdot 6,0}{\sqrt{70 \cdot 0,40}} = 1,48$$

aus Bild 15, erhält man mit $\lambda = 1,48$

$$f_0 = 4,2 \text{ a.n.} \quad f = \frac{4,2}{3,88 + 4,2} = 0,52$$

und

$$\alpha = 0,45$$

Ein Momentenausgleich, wie in Bild 17 dargestellt, zeigt, daß unter diesen Annahmen ein Volleinspannmoment von 10,0 Mpm/m auf 6,17 Mpm/m reduziert wird.

Die aus der Teileinspannung resultierende Momentenveränderung in Feldmitte ergibt sich zu :

$$\Delta M_F = \Delta M_S \cdot \alpha_M = (10,0 - 6,17) \cdot \alpha_M$$

wobei α_M aus Bild 16 für $\frac{\lambda}{2} = 0,74$ abzugreifen ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Beyer, K.: Die Statik im Stahlbetonbau
Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956 (II. Auflage)
- [2] Bleich, H.: Die Spannungsverteilung in den Gurten
gekrümmter Stäbe mit T- und I-förmigem
Querschnitt
Der Stahlbau, 1933, H. 1 S. 3
- [3] Drescher, G.: Der eingeschnürte kurze Hohlzylinder
und die Berechnung der Spannungsver-
hältnisse in ausgesteiften Flanschen
von Rahmenecken
Dissertation, Hochschule für Arch. und
Bauwesen, Weimar, 1959
- [4] Finsterwalder, U.: Von der Lahnbrücke Balduinstein bis
Schambeck, H.: zur Rheinbrücke Bendorf
Der Bauing., 1965, H. 3
- [5] Finsterwalder, U.: Die querversteiften zylindrischen
Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem
Querschnitt
Ing. Archiv, 1933, S. 43
- [6] Girkmann, K.: Flächentragwerke
Springer-Verlag, Wien, 1963
(6. Auflage)
- [7] Márkus, J.: Theorie und Berechnung rotations-
symmetrischer Bauwerke
Werner-Verlag, Düsseldorf, 1967
- [8] Reissner, E.: Analysis of Shear Lag Problems
Journ. Aeron. Sc. 1941, S. 284
- [9] Steinhardt, O.: Beitrag zur Berechnung gekrümmter
Stäbe mit gegliedertem Querschnitt
Dissertation, TH Darmstadt, 1938
- [10] Thürlimann, B.: The Effective Width of a Circular
Bereuter, R.O.: Cylindrical Shell Adjacent to a
Johnston, B.G.: Circumferential Reinforcing Rib
Proc. First Nat. Concr. Appl. Mech.,
publ. by ASME, New York

T a f e l I ⁺)

Meßst. Nr.	$\epsilon \cdot 10^6$
1	-247
2	-245
3	- 32
4	+177
5	-137
6	- 18
7	-265
8	-268
9	-104
10	+315
11	-185
12	+ 43
13	-277
14	-394
15	-172
16	+398
17	-228
18	+ 23
19	-351

Meßst. Nr.	$\epsilon \cdot 10^6$
20	-369
21	- 33
22	+256
23	-171
24	- 71
25	-220
26	-382
27	-112
28	+317
29	-162
30	- 52
31	-405
32	-336
33	+337
34	- 53
35	- 24
36	-158
37	-426
38	-339

Meßst. Nr.	$\epsilon \cdot 10^6$
39	-316
40	- 28
41	- 60
42	-233
43	-272
44	-252
45	+ 72
46	+ 84
47	-265
48	-254
49	+ 53
50	+ 53
51	-542
52	-384
53	+389
54	- 67
55	- 76
56	-202
57	-446

Meßst. Nr.	$\epsilon \cdot 10^6$
58	-425
59	+418
60	-134
61	- 15
62	-303
63	-261
64	-263
65	+ 21
66	+ 34
67	-212
68	-219
69	+ 73
70	+ 88
71	-634
72	-623
73	+392
74	+358
101	+276
-	-

Dehnmeßwerte für P = 20 kp

⁺) für die Anordnung der Meßstellen vgl. Bild 9!

Tafel II/1

Längs- und Querspannungen der Druckplatte

ϵ_L	$\nu \cdot \epsilon_q$	σ_L	Bemerkung
-245	+ 67	- 8,33	Querschnitt I Mitte
-247	- 12	-12,12	
-268	+120	- 6,93	Querschnitt II Mitte
-265	-39,5	-14,26	
-336	- 20	-16,68	Querschnitt III Rand DMS 31-34
-405	+128	-12,96	
-382	+120	-12,28	Querschnitt III Mitte
-220	-42,5	-12,30	
-339	- 11	-16,40	Querschnitt III Rand DMS 37-40
-426	+120	-14,32	
-384	- 25	-19,18	Querschnitt IV Rand DMS 51-54
-542	+148	-18,45	
-394	+151	-11,38	Querschnitt IV Mitte
-277	-65,5	-16,03	
-425	- 51	-22,30	Querschnitt IV Rand DMS 57-60
-446	+159	-13,43	
-369	+ 97	-12,74	Querschnitt V Mitte
-351	-12,5	-17,00	

ϵ_q	$\nu \cdot \epsilon_L$	σ_q	Bemerkung
+177	- 93	+ 3,94	Querschnitt I Mitte
- 32	- 94	- 5,90	
+315	-102	+ 9,96	Querschnitt II Mitte
-104	-101	- 9,60	
- 53	-128	- 8,57	Querschnitt III Rand DMS 31-34
+337	-154	+ 8,57	
+317	-145	+ 8,05	Querschnitt III Mitte
-112	- 84	- 9,18	
- 28	-129	- 7,35	Querschnitt III Rand DMS 37-40
+316	-162	+ 7,21	
- 67	-146	- 9,96	Querschnitt IV Rand DMS 51-54
+389	-206	+ 8,57	
+398	-150	+11,60	Querschnitt IV Mitte
-172	-105	-12,96	
-134	-161	-13,80	Querschnitt IV Rand DMS 57-60
+418	-170	+11,60	
+256	-140	+ 5,43	Querschnitt V Mitte
- 33	-133	- 7,77	

Obere Zeile: σ_o untere Zeile: σ_u

Tafel II/2
Längsspannungen der Stege

ϵ_l	σ_l	Bemerkung	DMS Nr.
-272	-10,88	Querschnitt III Steg	43
-252	-10,08	"	44
+ 72	+ 2,88	"	45
+ 84	+ 3,36	"	46
-265	-10,60	"	47
-254	-10,16	"	48
+ 53	+ 2,12	"	49
+ 53	+ 2,12	"	50
-261	-10,44	Querschnitt IV Steg	63
-263	-10,52	"	64
+ 21	+ 0,84	"	65
+ 34	+ 1,36	"	66
-212	- 8,48	"	67
-219	- 8,76	"	68
+ 73	+ 2,92	"	69
+ 88	+ 3,52	"	70
+276	+11,04	"	101
-634	-25,36	" Steg unten	71
-623	-24,92	" "	72
+392	+15,68	" Fahrbahn	73
+358	+14,32	" "	74

obere Zeile: $\sigma_{\text{außen}}$

untere Zeile: σ_{innen}

T a f e l I I I

Querschnitt	I [cm ⁴]	Wu [cm ³]	N [kp/cm]	B·N [kp/cm]	M _R [kpem/cm]	M _M [kpem/cm]
I	1093,8	153	3,73	2,88	-	0,099
II	704,5	114,5	4,59	3,54	-	0,122
III	493,8	90,5	5,34	4,12	-0,305	0,142
IV	331,0	70,7	5,97	4,61	-0,341	0,159
V	258,85	59,3	5,82	4,49	-	0,155

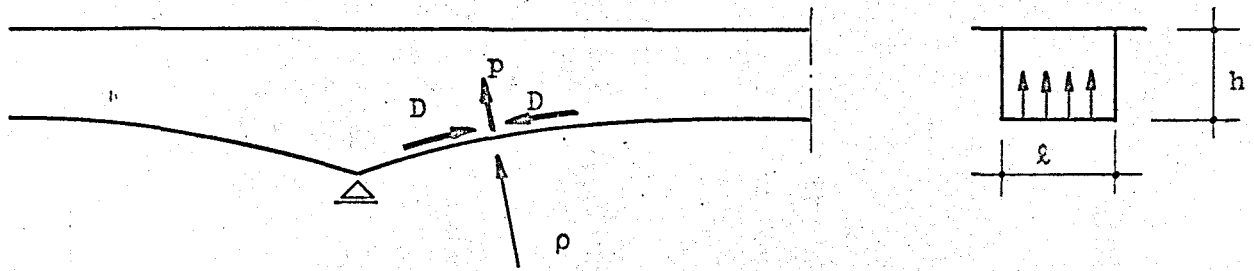


Bild 1

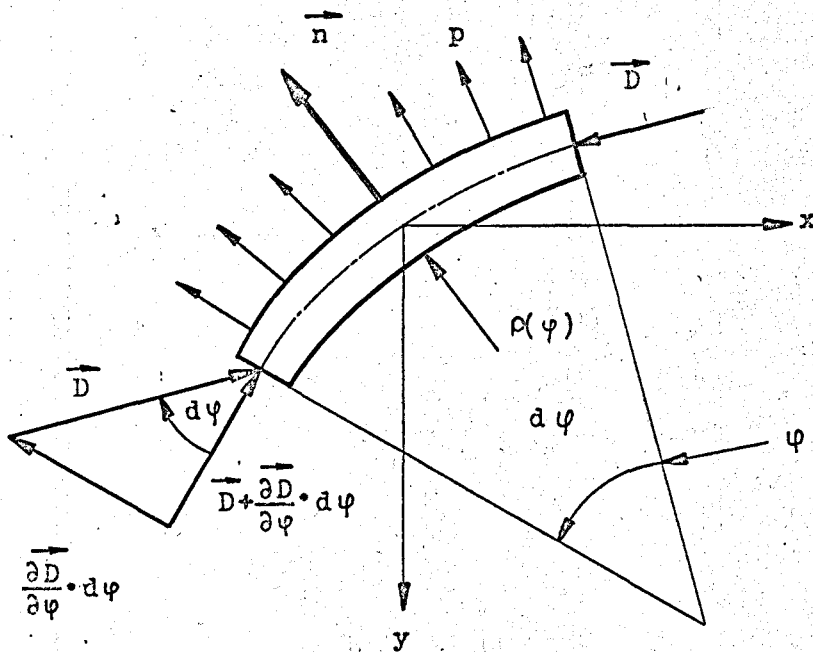
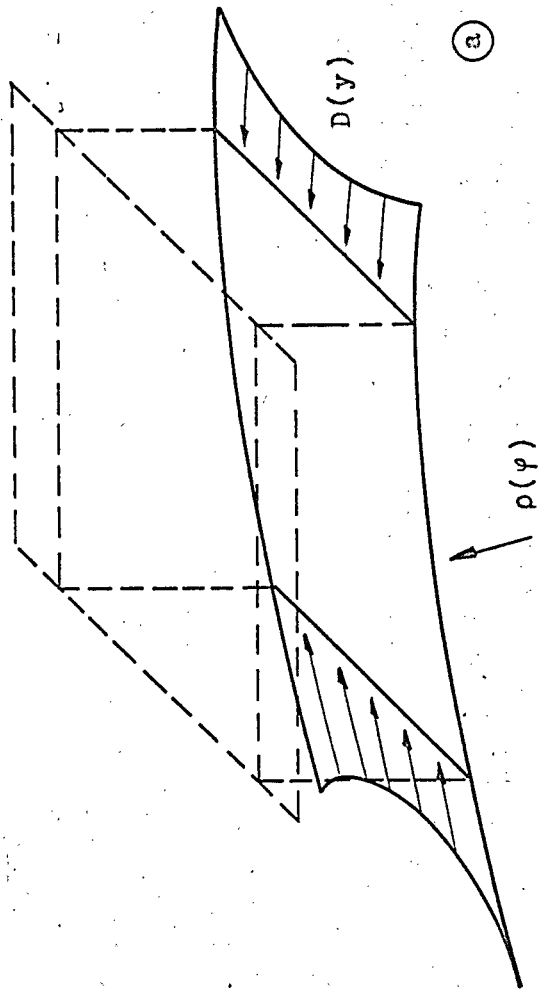
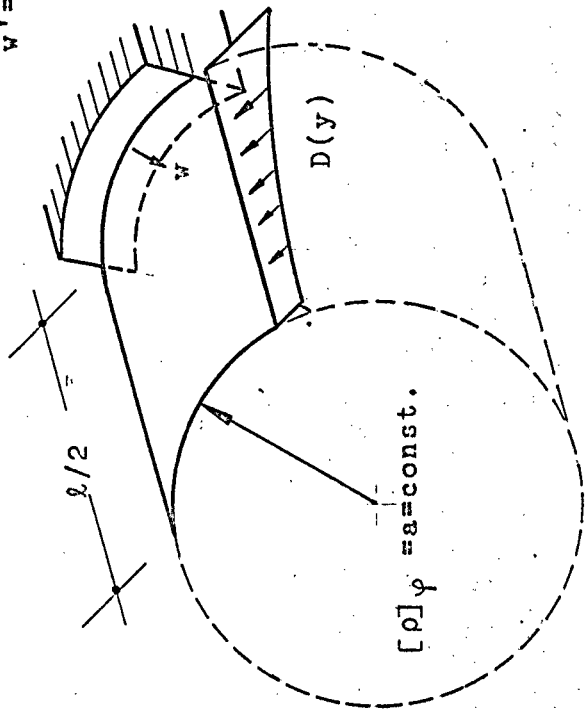


Bild 2

$$w = 0$$

$$w' = 0$$



(a)



(b)

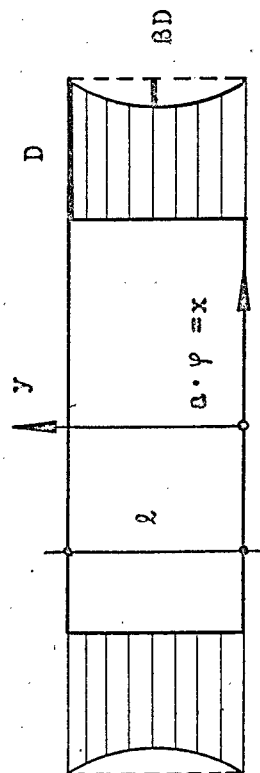


Bild 3

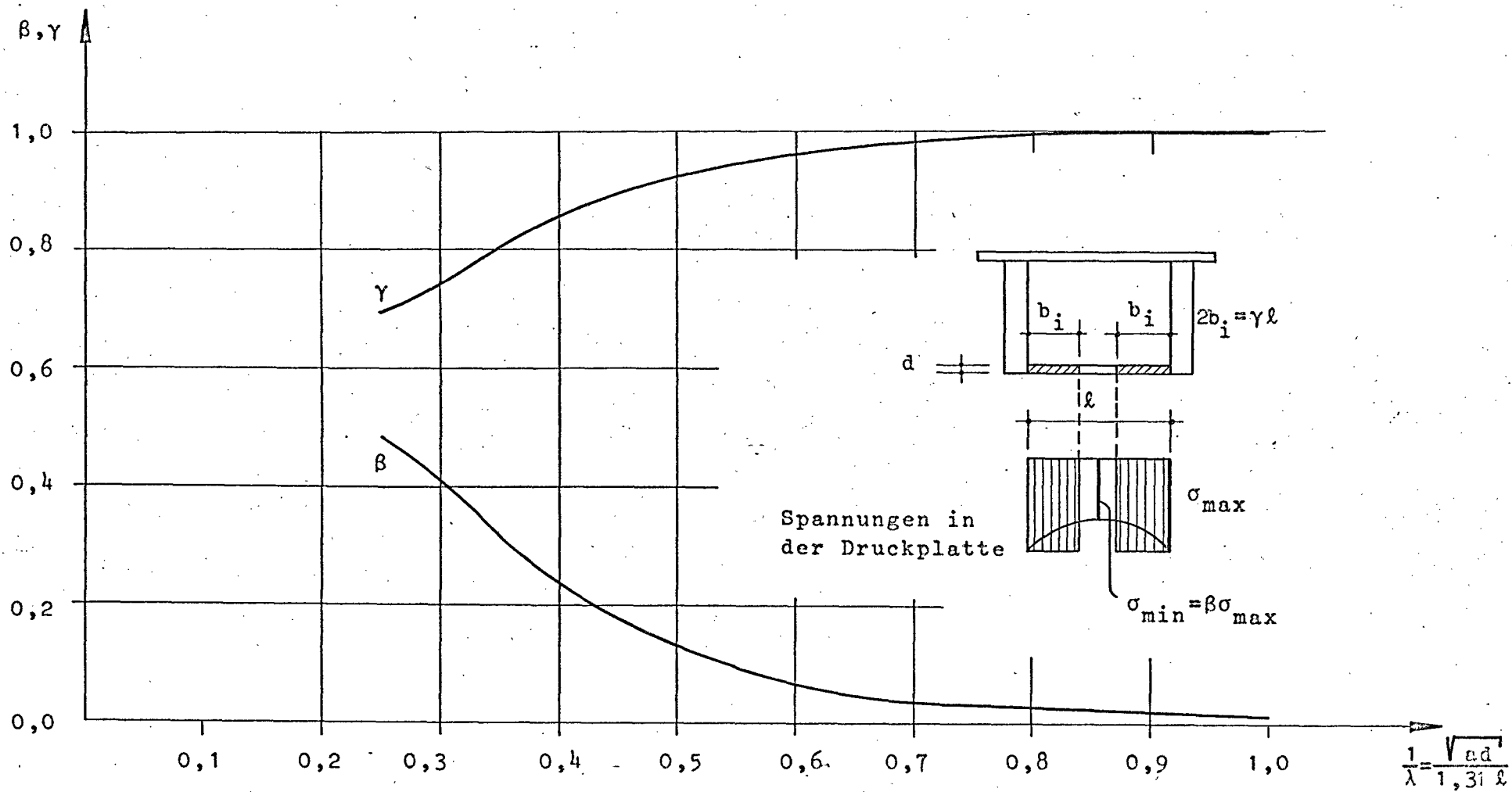


Bild 4

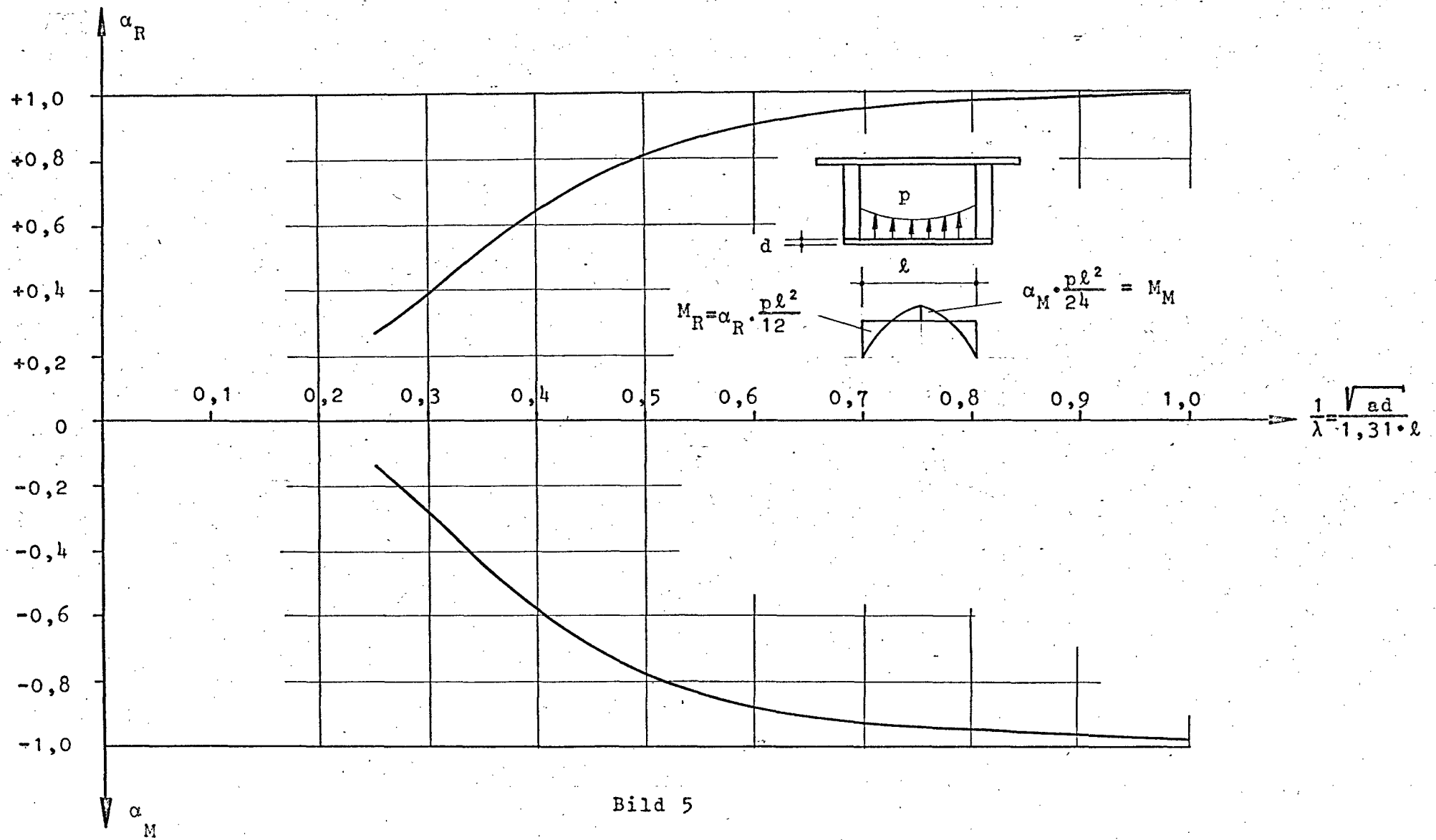


Bild 5

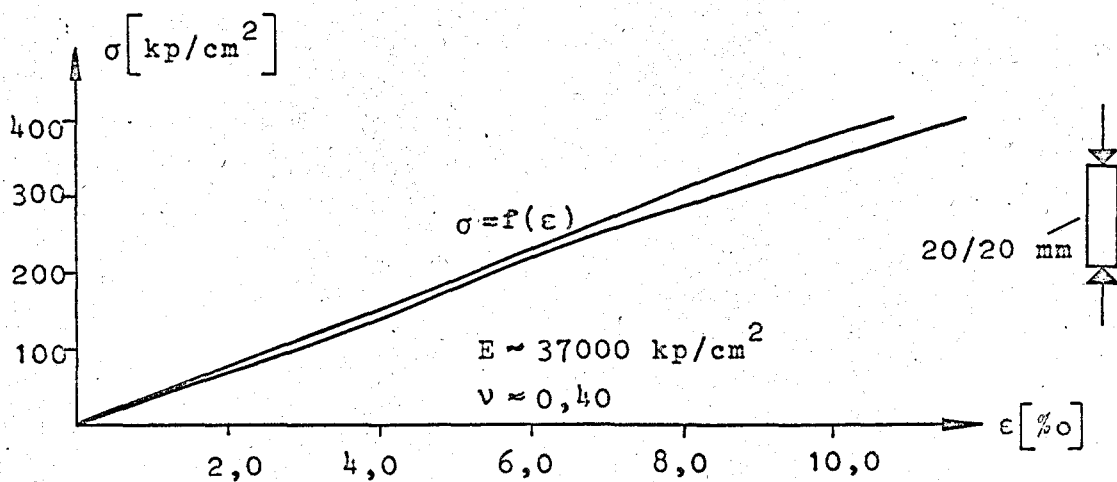
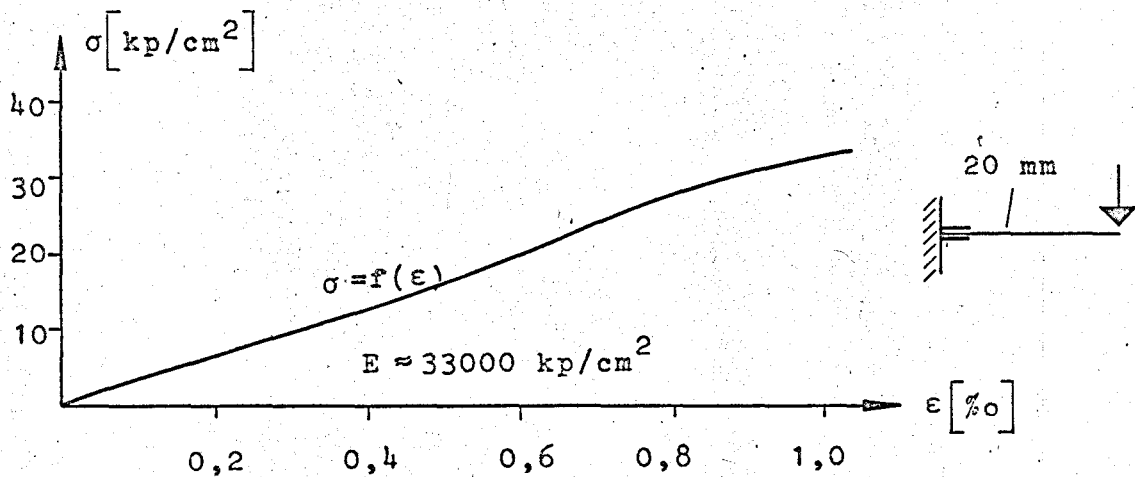
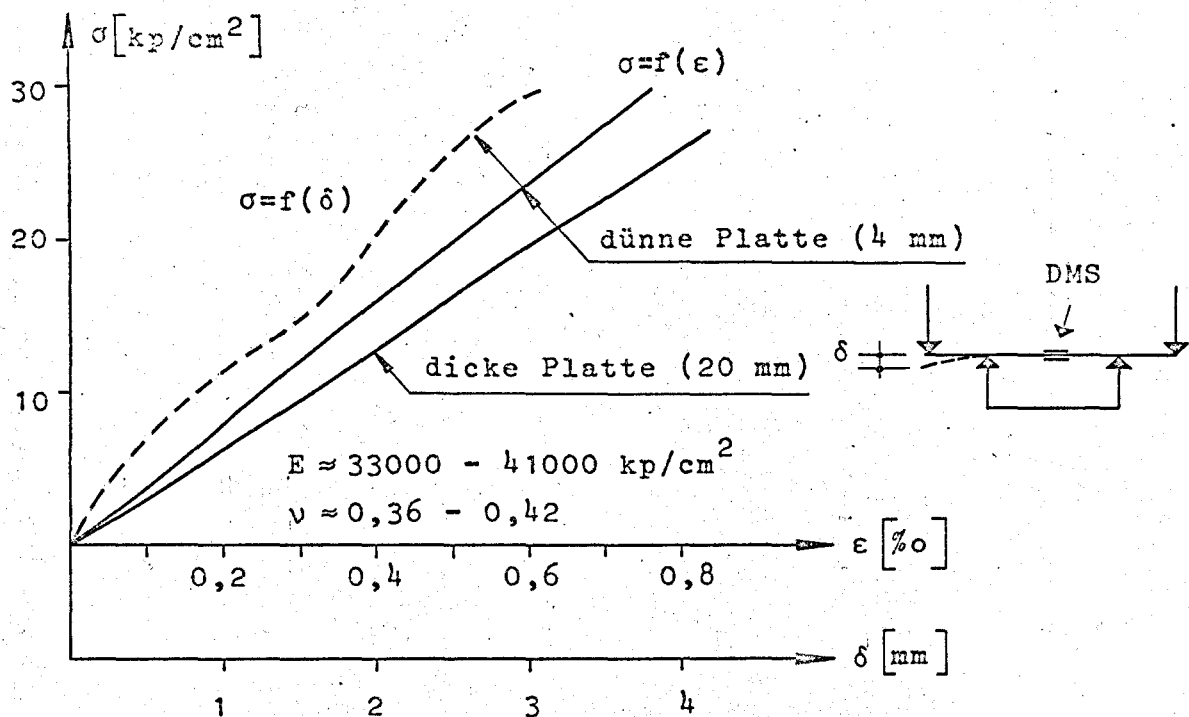
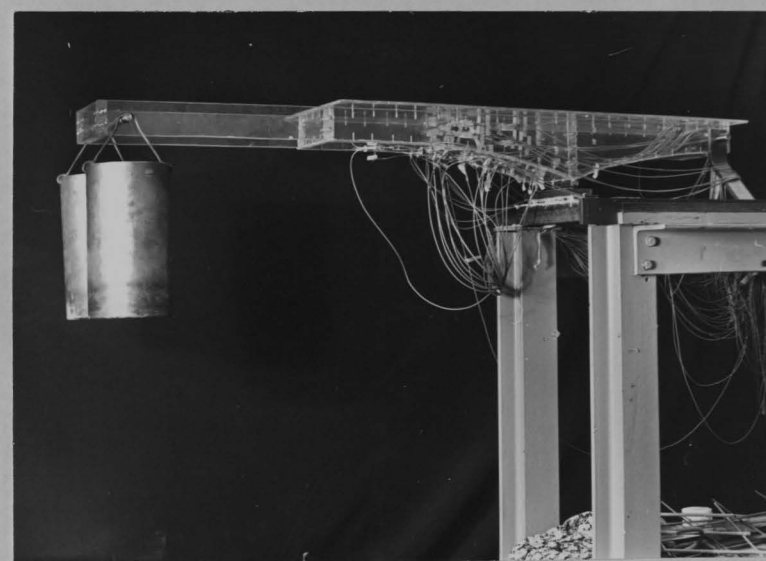
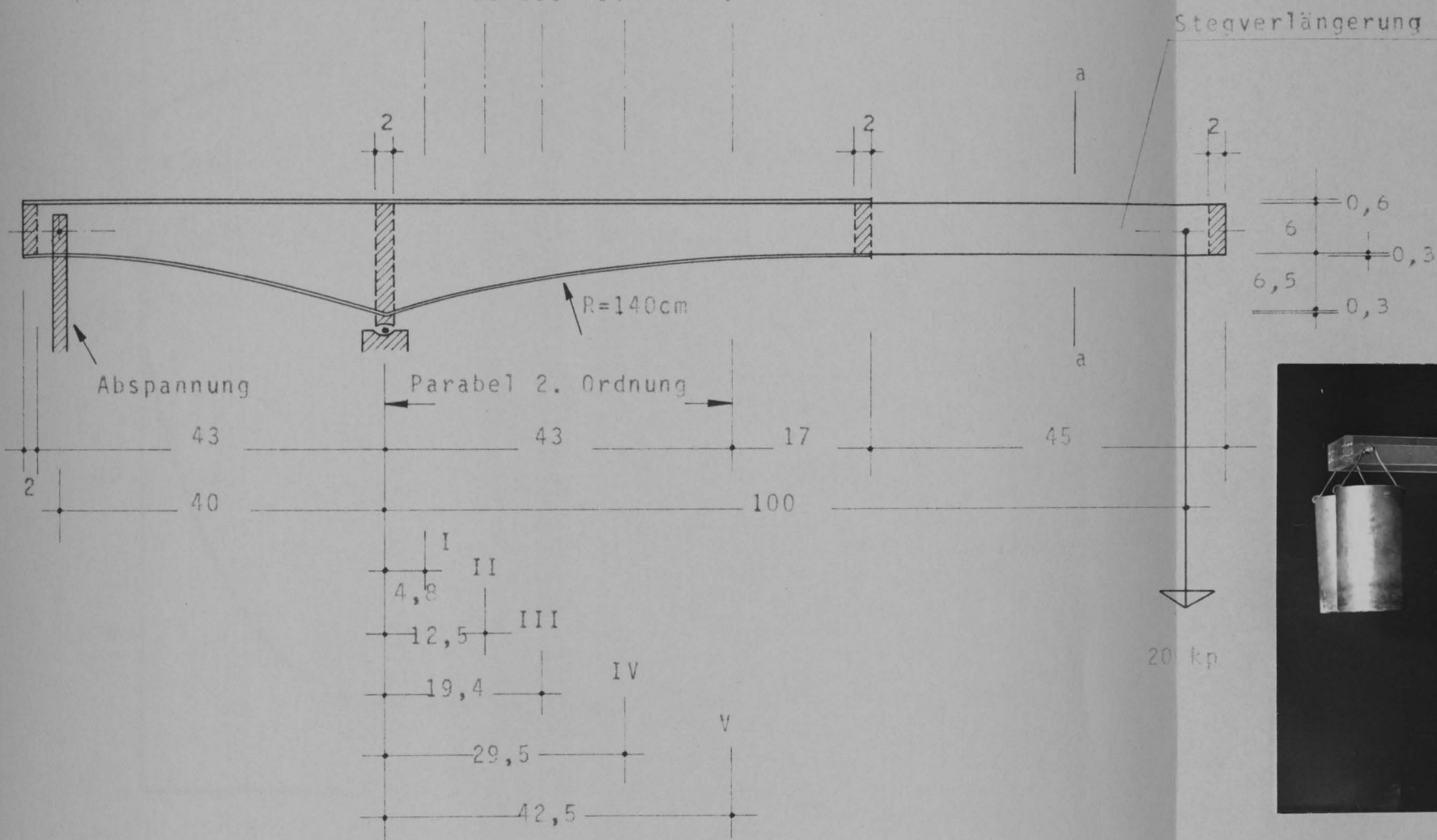


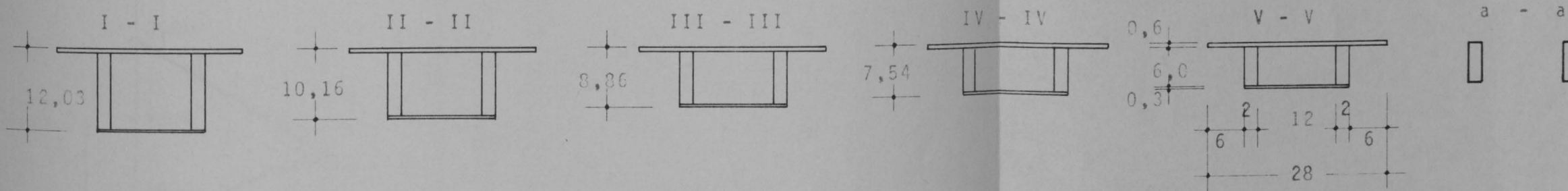
Bild 6
Ermittlung des E-Moduls von Plexiglas

Querschnitte :

I II III IV V



Querschnitte :



alle Maße in cm!

B I L D 7
Versuchseinrichtung

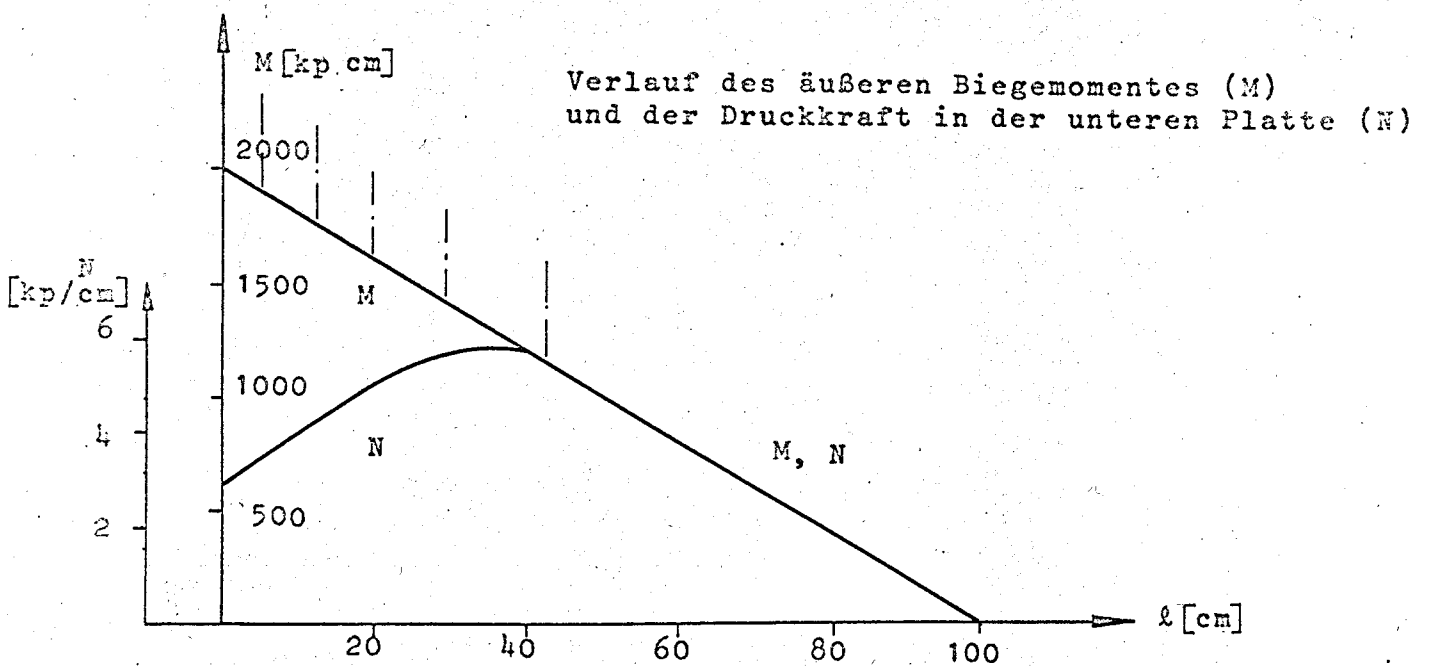
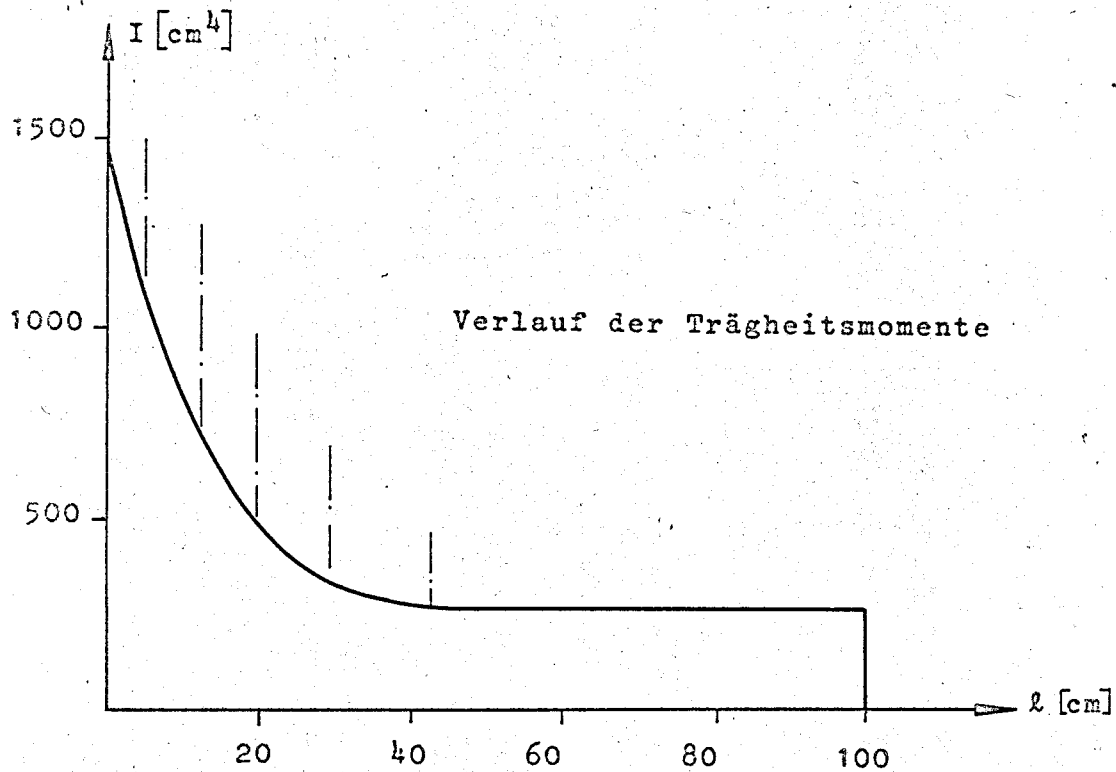
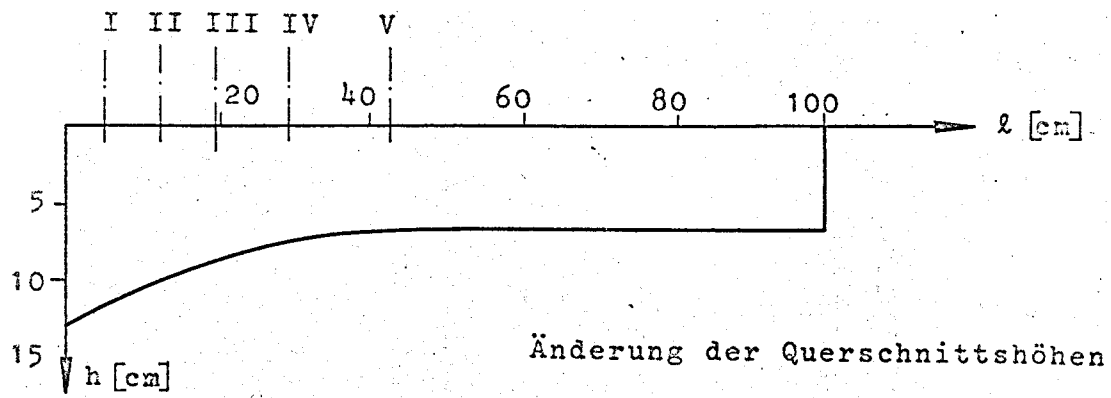
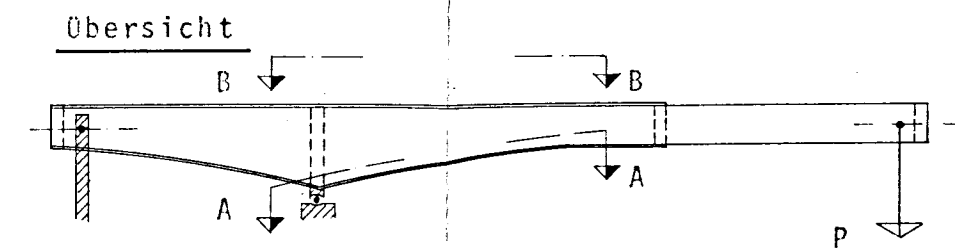
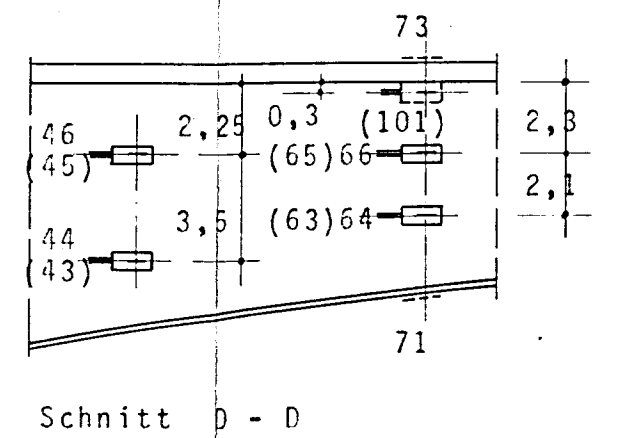
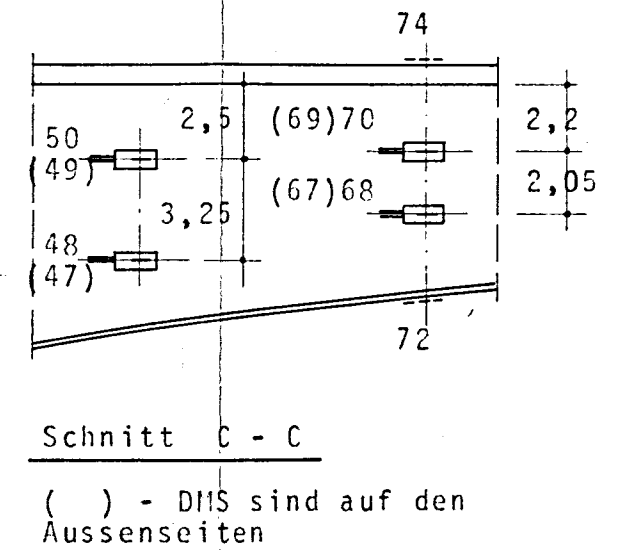
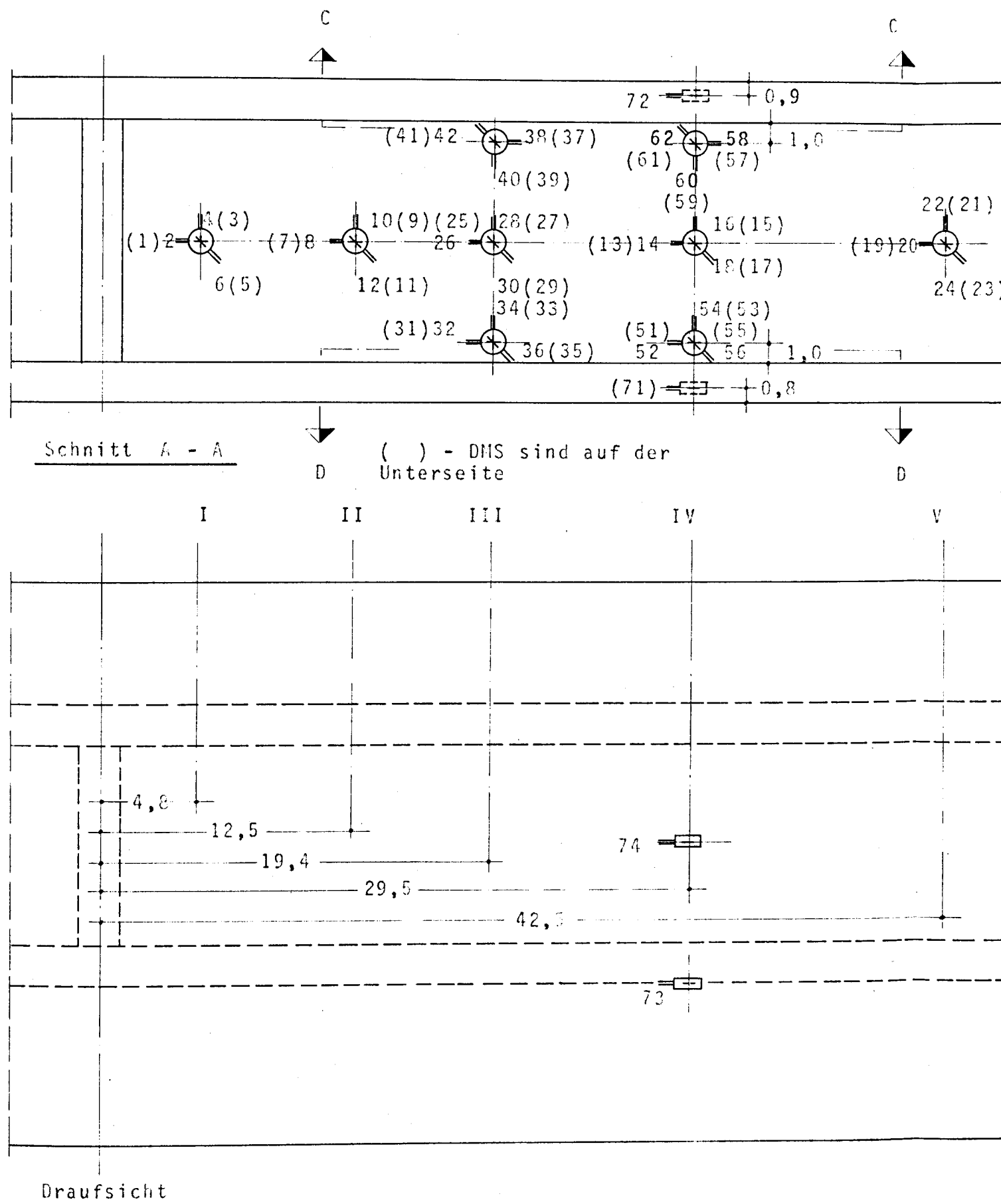


Bild 8



alle Maße in cm!

B I L D 9

Anordnung der Meßstellen

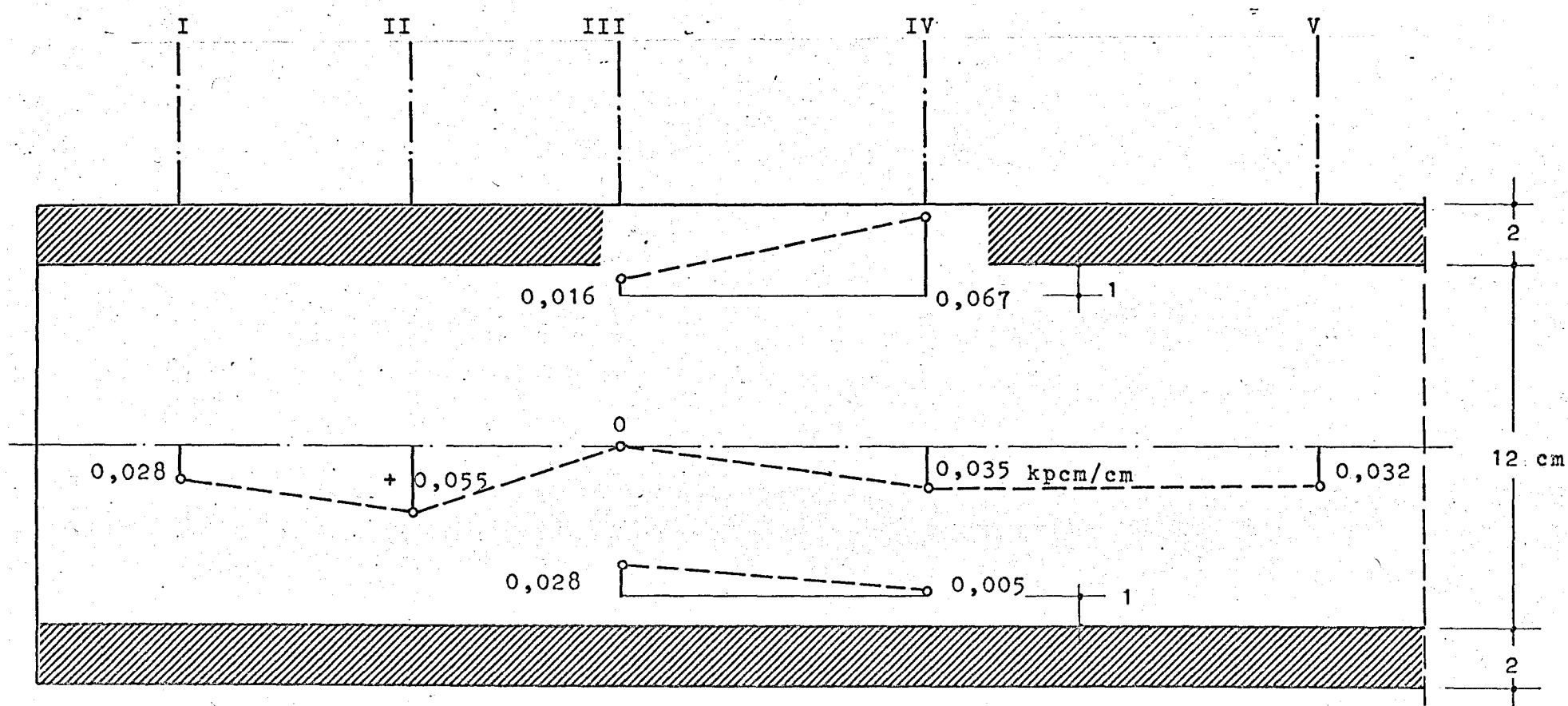


Bild 10
Verlauf der Längsmomente in Längsrichtung (Versuchswerte)

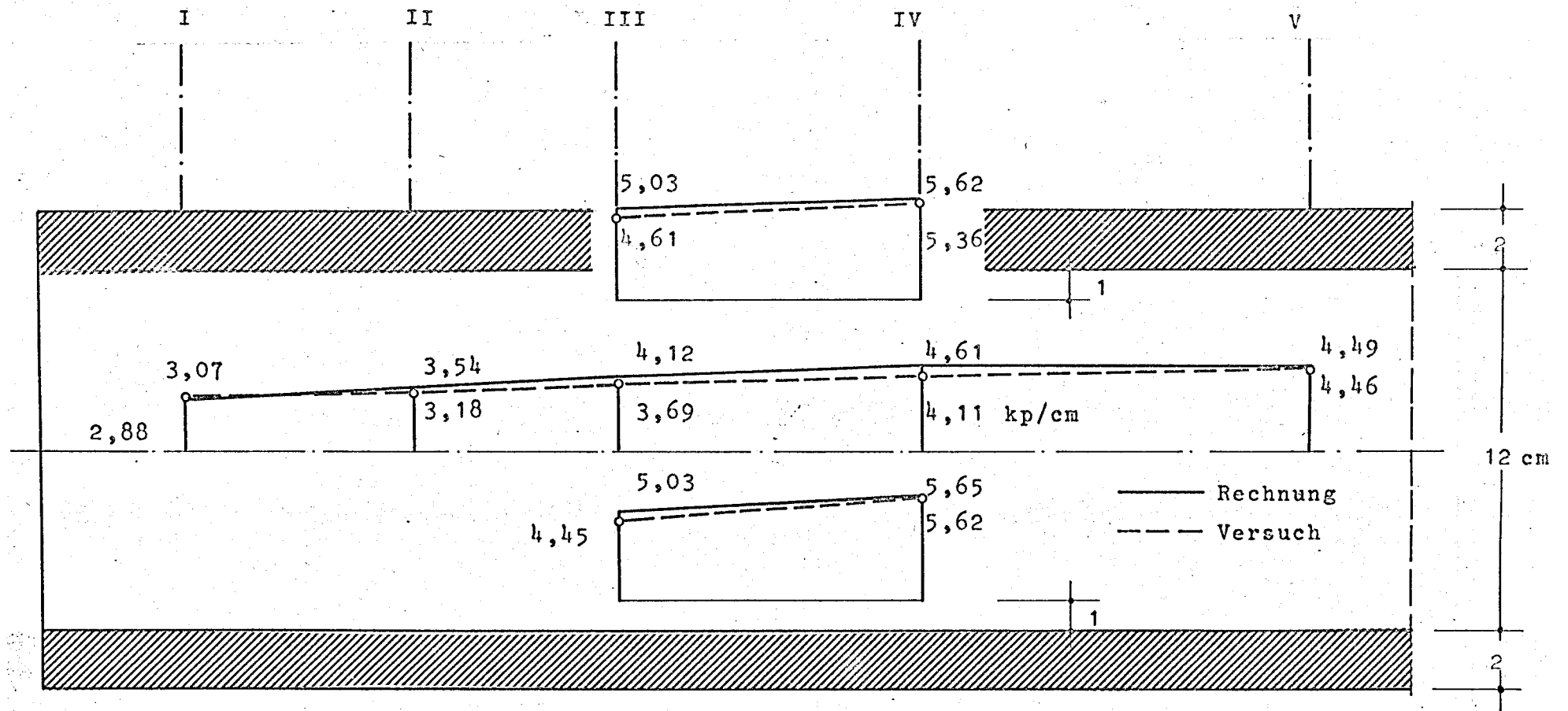
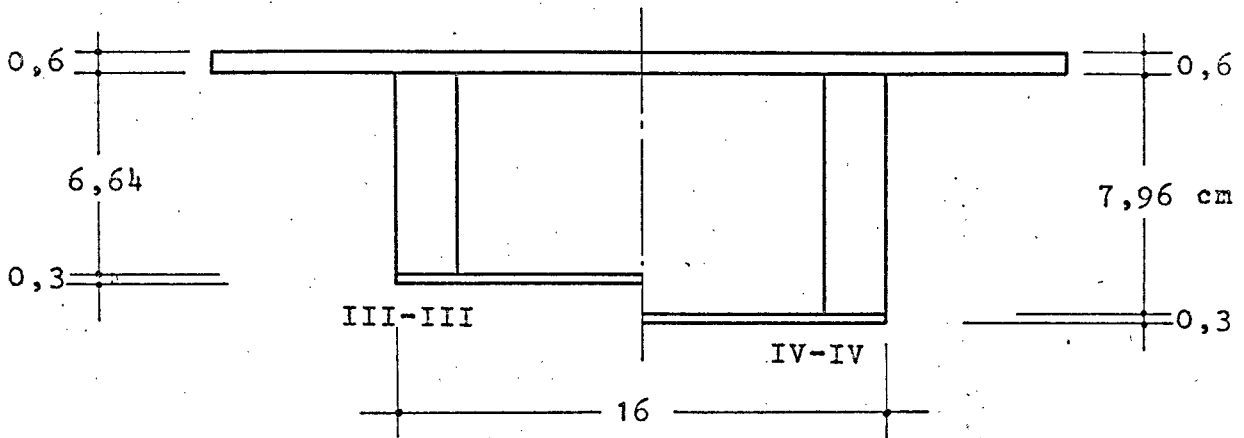


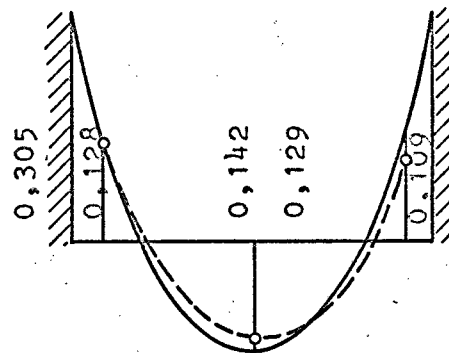
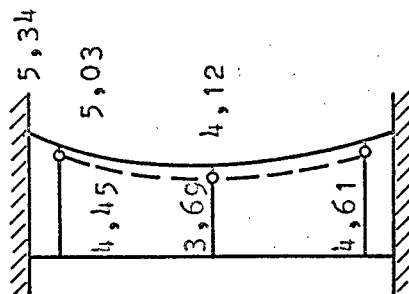
Bild 12
Verlauf der Normalkräfte in Längsrichtung

Querschnitt

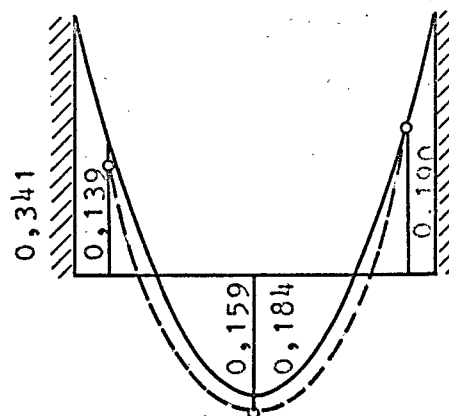
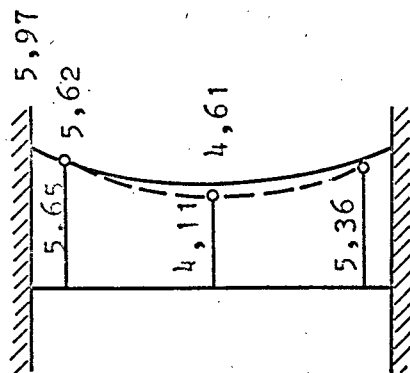


Normalkräfte [kp/cm]

Quermomente [kpcm/cm]



III-III



IV-IV

— Rechnung

--- Versuch

Bild 13

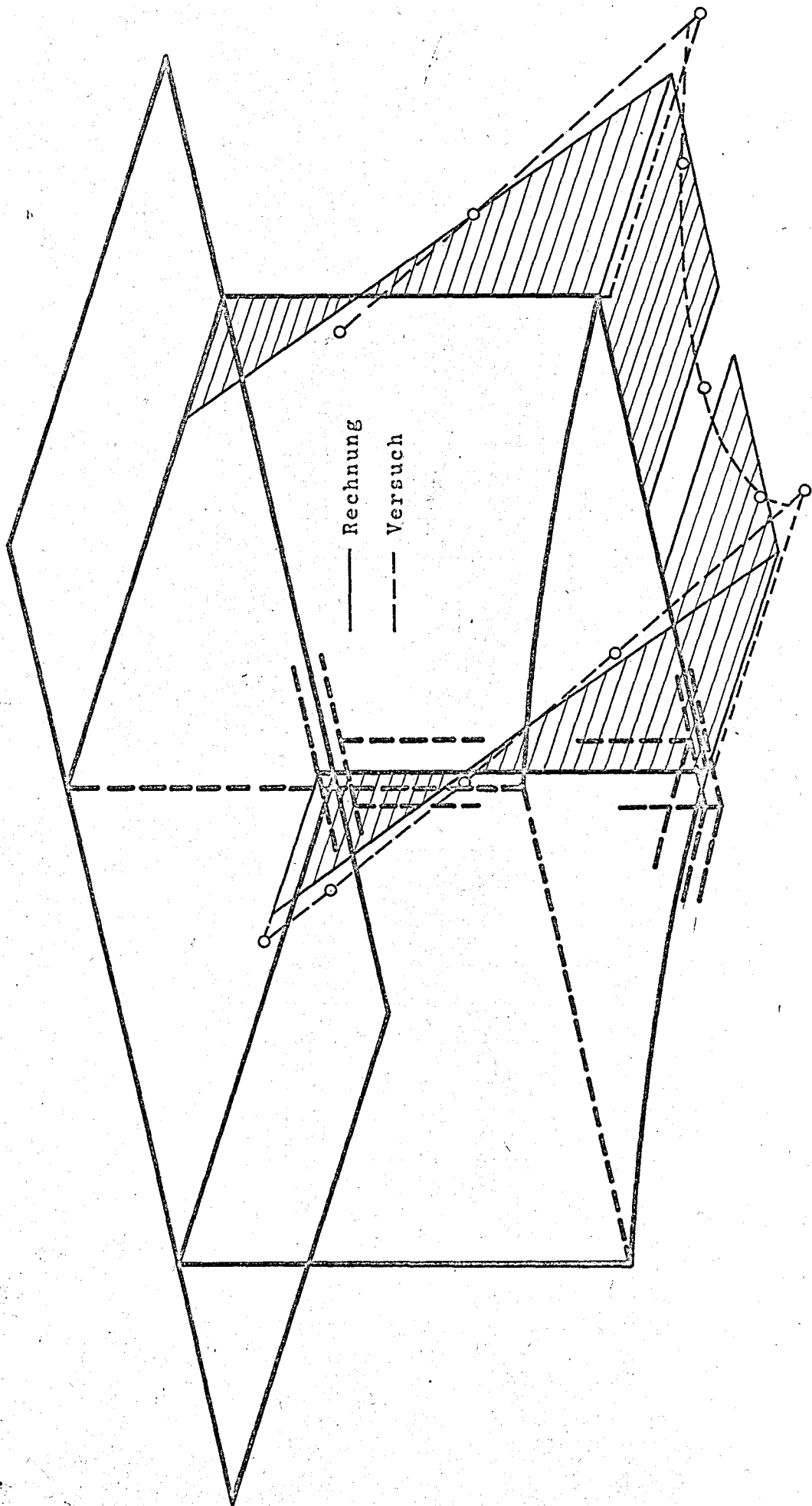


Bild 14
Längsspannungen im Querschnitt IV

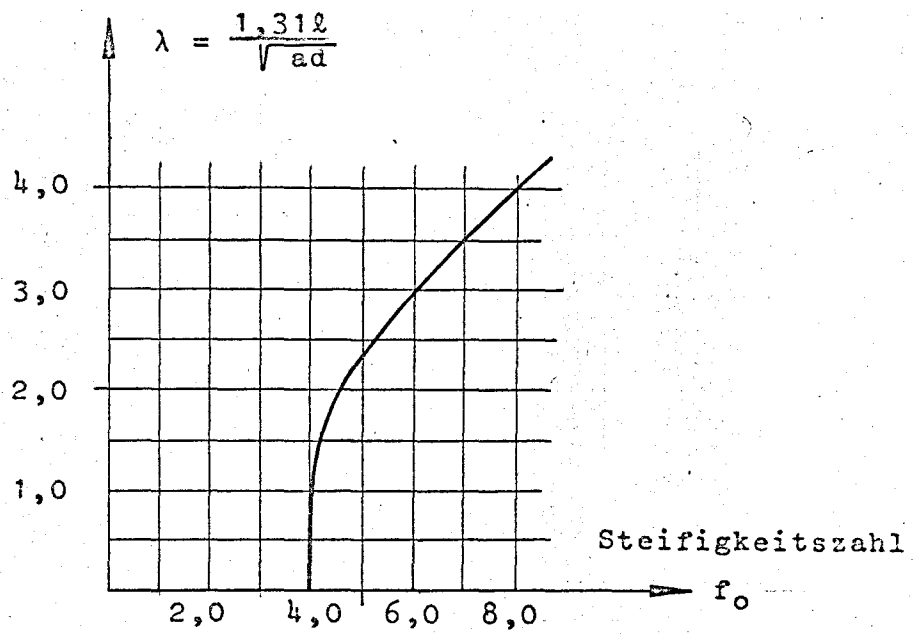


Bild 15

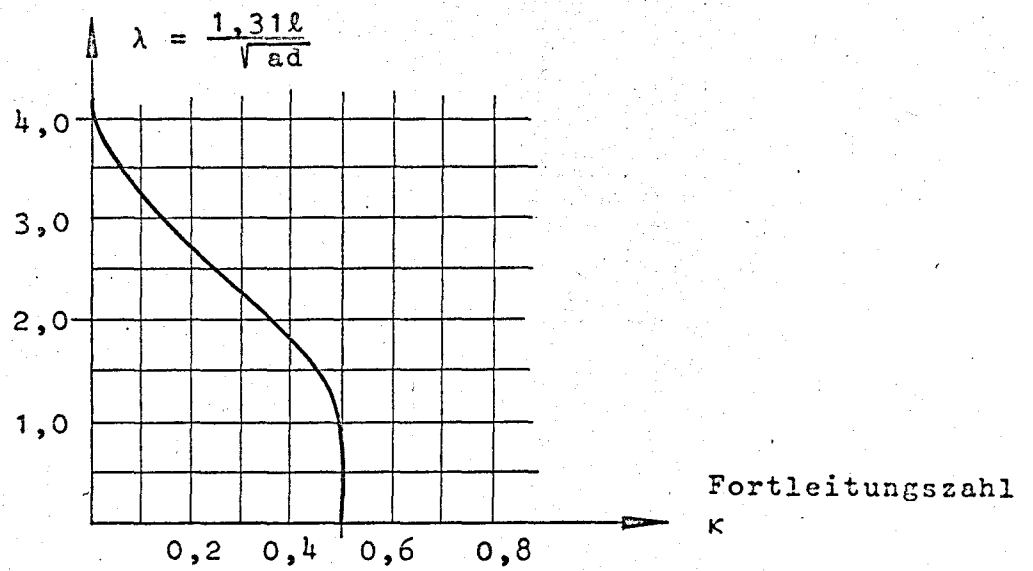


Bild 16

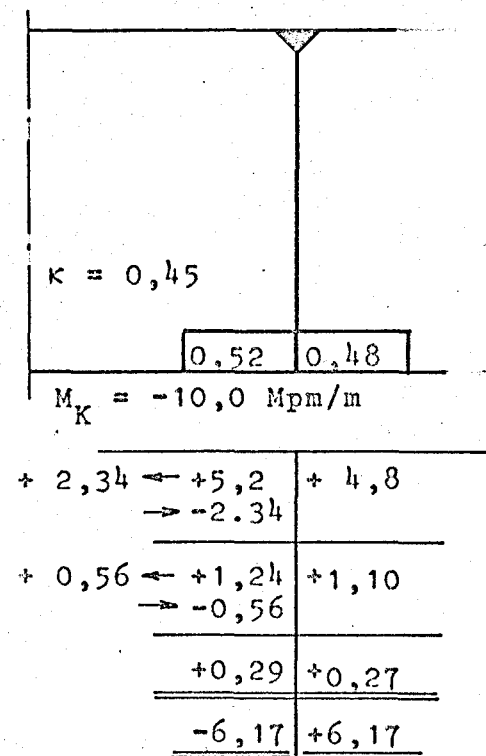
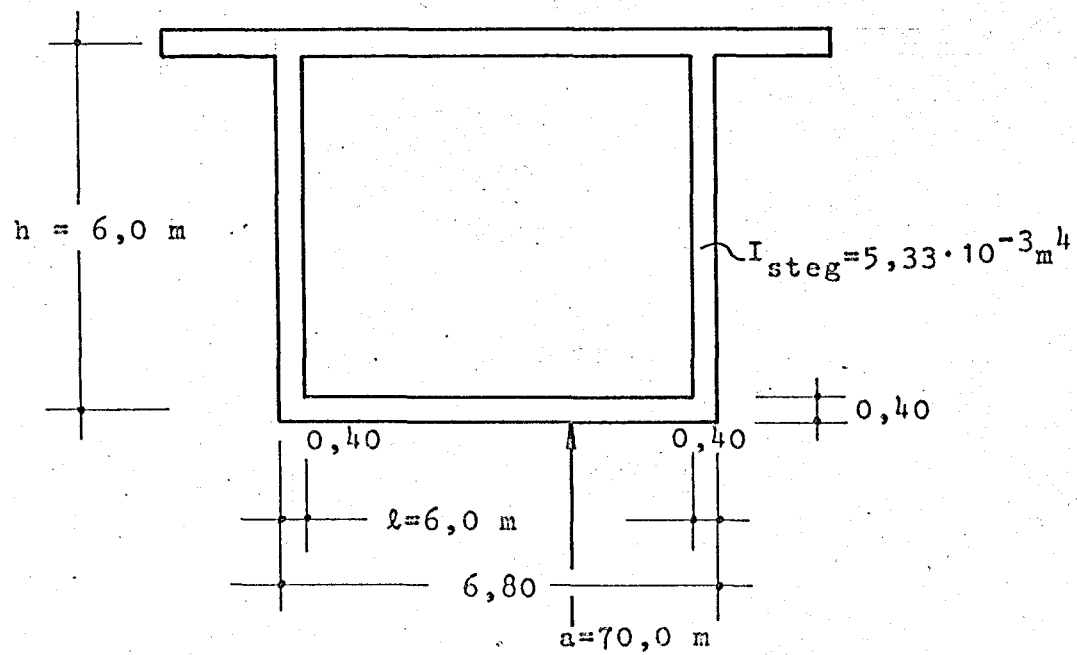


Bild 17

28. März 2011

30 - 0531 / 001